Projeto e Análise de Algoritmos I

Aula 11 - Coloração de Grafos

Lucas Nunes Alegre

lnalegre@inf.ufrgs.br

Instituto de Informática

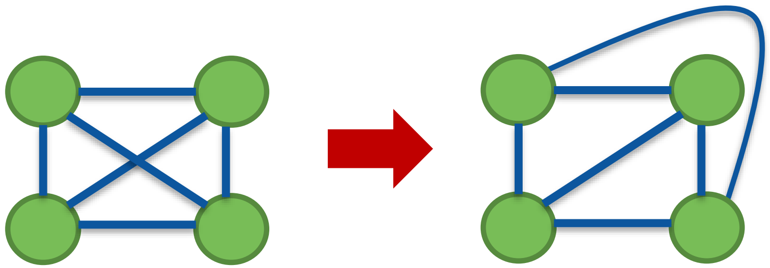
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, Brasil

2025/1

Última Aula: Planaridade

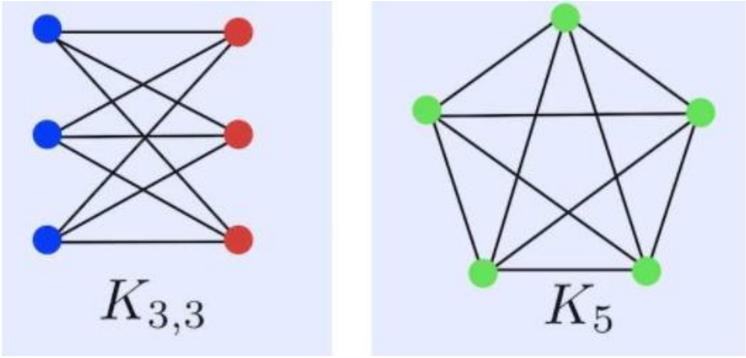
- <u>Grafos Planares</u>



- <u>Fórmula de Euler</u>

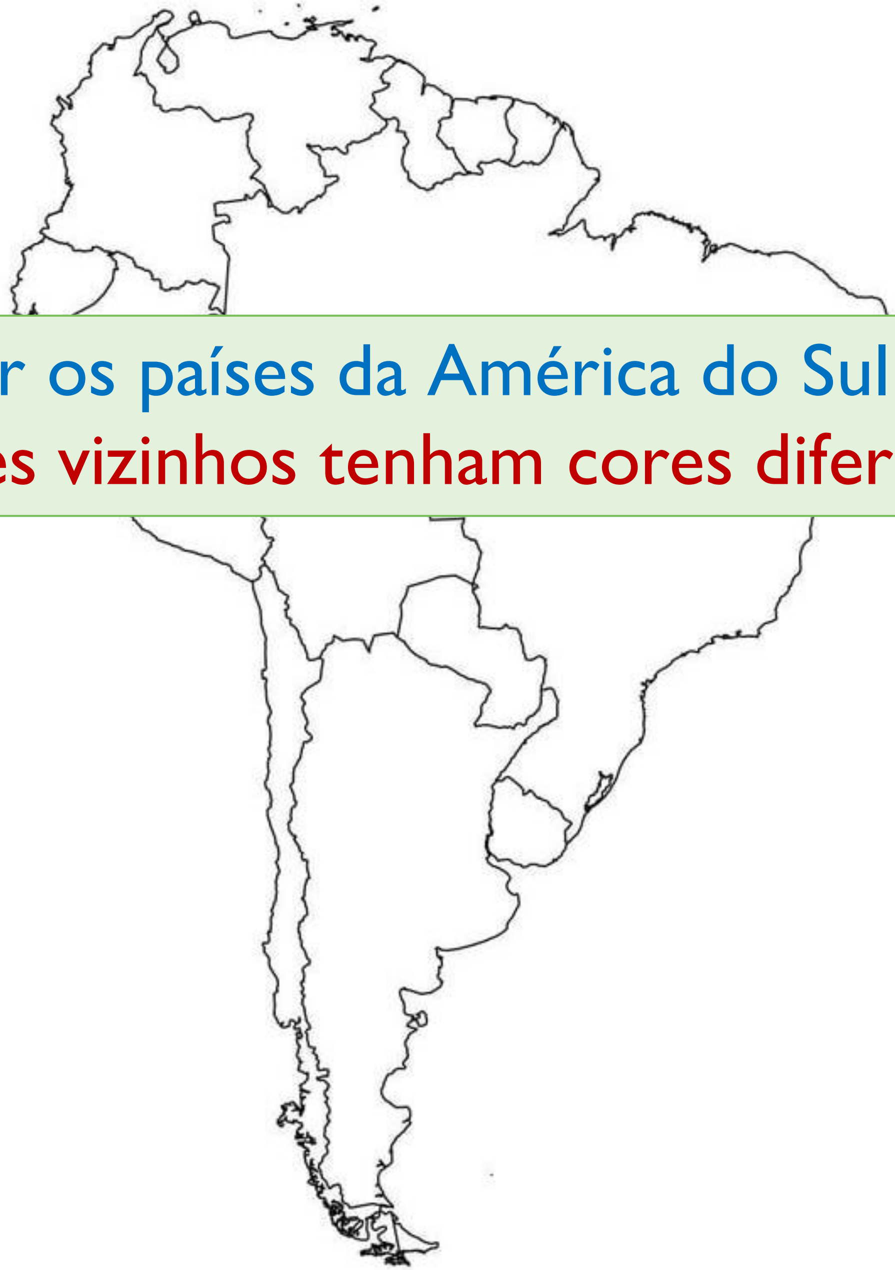
$$v + f = e + 2$$

- Teorema (Kuratowski):
  Um grafo simples é não-planar sss tem como subgrafo uma extensão do grafo $K_{3,3}$ ou K_5



Roteiro: Coloração de Grafos

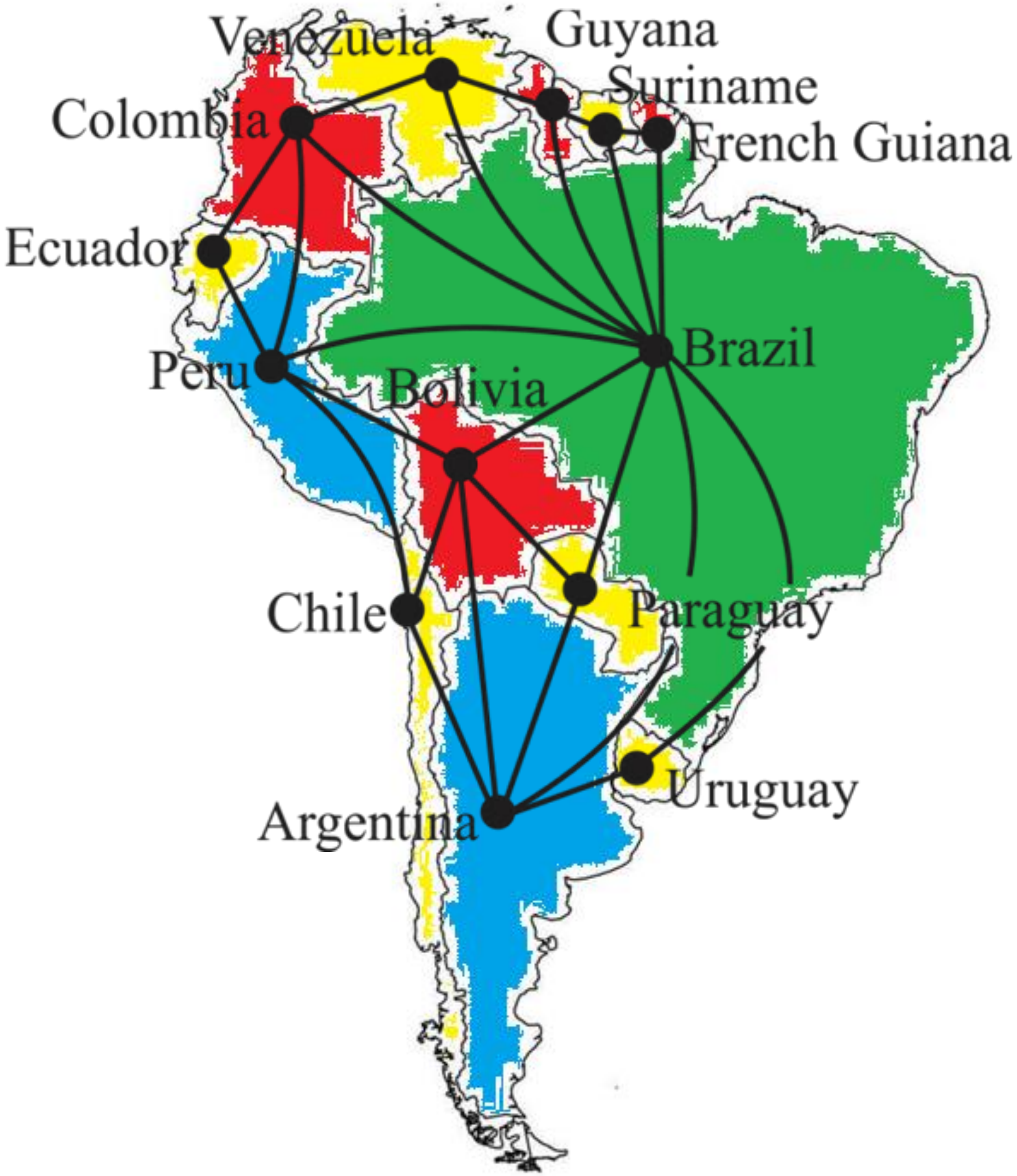
1. Motivação e Aplicações
2. Definição
3. Número Cromático
4. Limites para o Número Cromático
5. Teorema das 5 Cores
6. Teorema das 4 Cores
7. Algoritmo Guloso

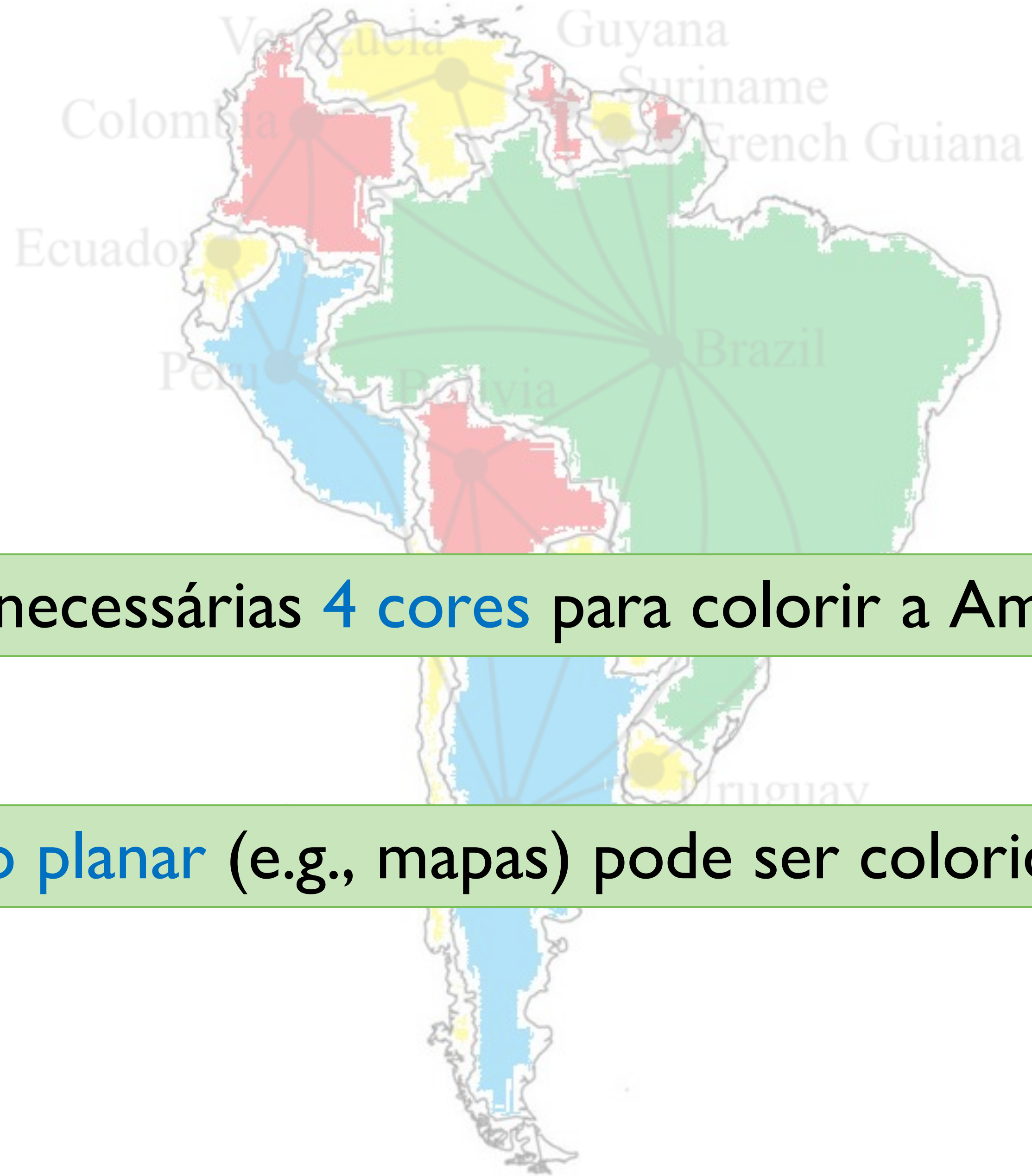


Vamos colorir os países da América do Sul de modo que países vizinhos tenham cores diferentes.

Precisamos de uma terceira cor para o Uruguai.

Não podemos colorir a Bolívia de verde, amarelo ou azul.


Venezuela
Guyana
Suriname
French Guiana
Colombia
Ecuador
Peru
Brazil
Bolivia
Chile
Paraguay
Uruguay
Argentina



Foram necessárias 4 cores para colorir a América do Sul.

Nesta Aula:

Todo grafo planar (e.g., mapas) pode ser colorido com 4 cores!

Outras Aplicações

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

Outras Aplicações

- ## Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

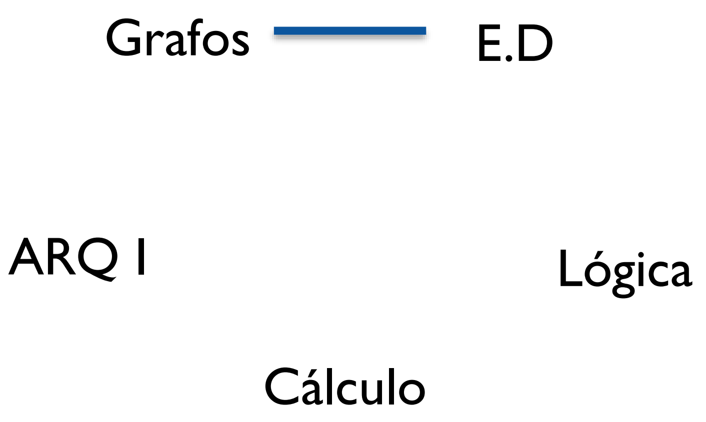
Grafos
E.D
ARQ I
Lógica
Cálculo

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

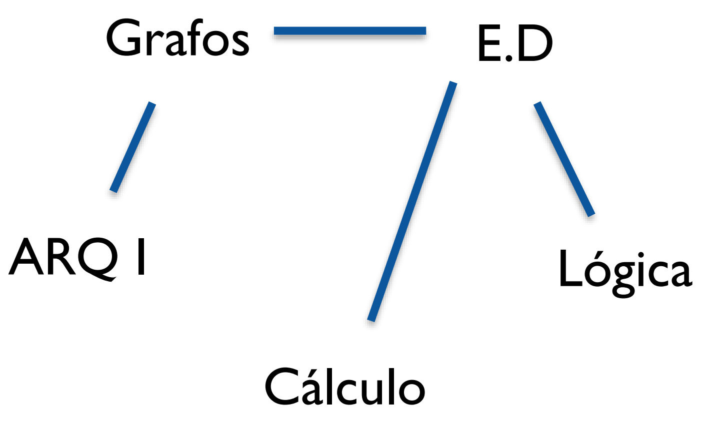


Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

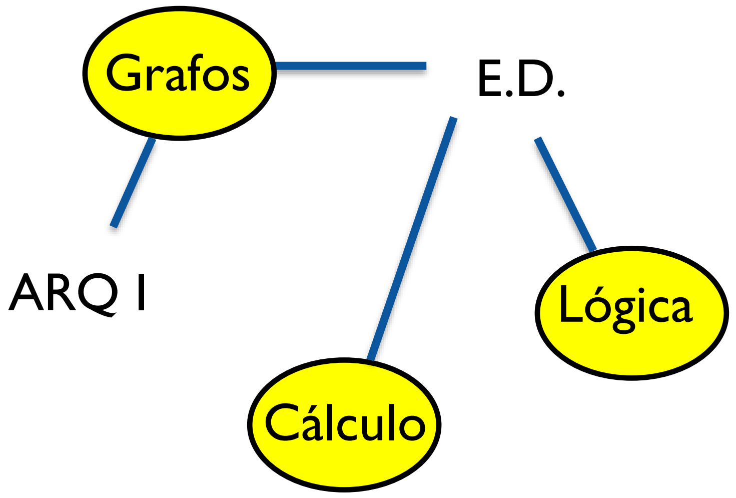


Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.



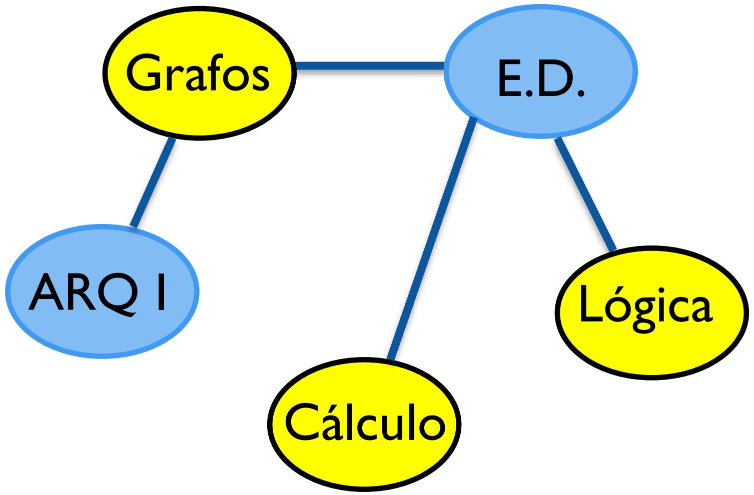
Dia 1: Grafos, Cálculo e Lógica

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Disciplinas: Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II
  - Professores querem agendar as datas das provas
  - Restrição: nenhum aluno com mais de uma prova no mesmo dia
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.



Dia 1: Grafos, Cálculo e Lógica

Dia 2: ARQ I e E.D.

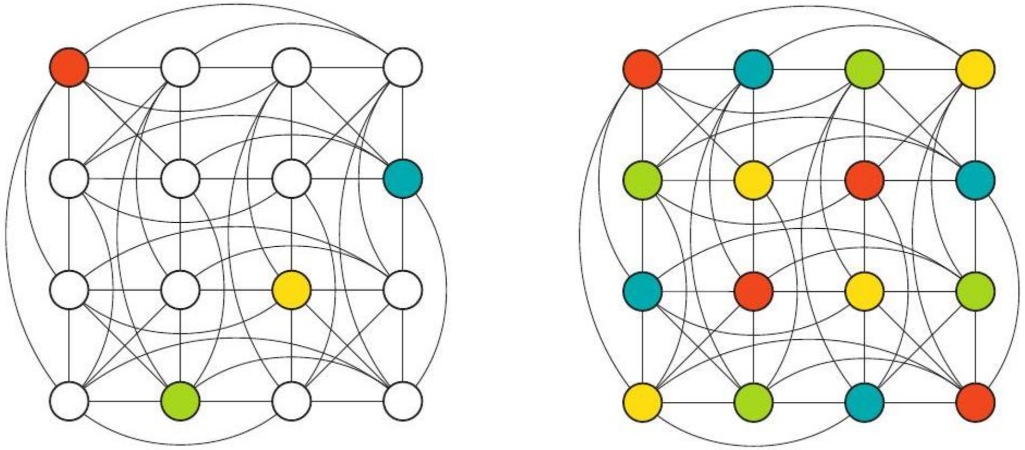
Outras Aplicações

- Sudoku

1			
			2
		4	
	3		

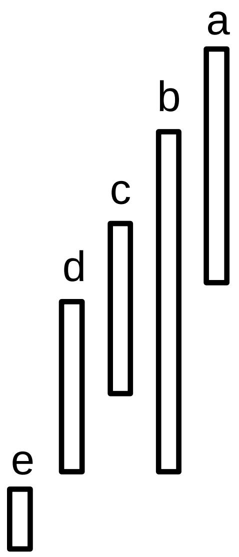
1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

- Nodos: células do jogo
- Arestas: restrições
- Cores: valores de 1 a 4

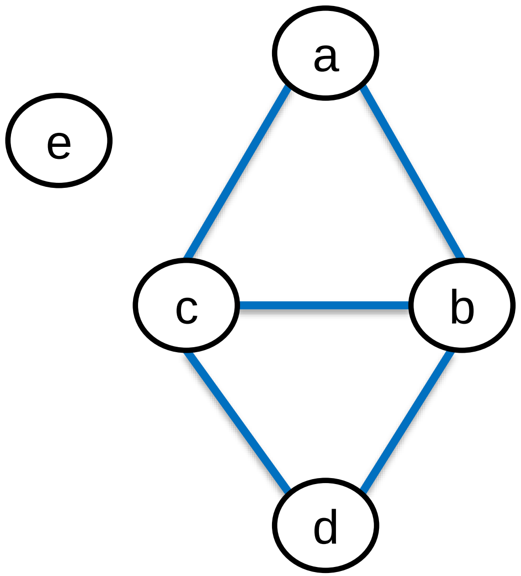


Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Considere o seguinte programa (com variáveis a, b, c, d, e) e 3 registradores (R1, R2, R3)
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos temporais?
- Nodos: variáveis
- Arestas: restrição temporal entre variáveis
- Cores: registradores



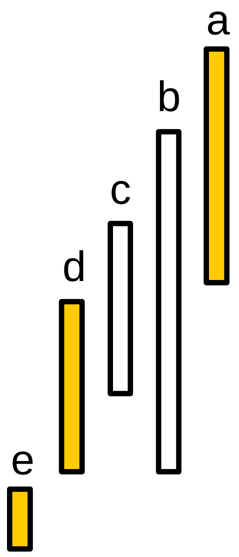
a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7



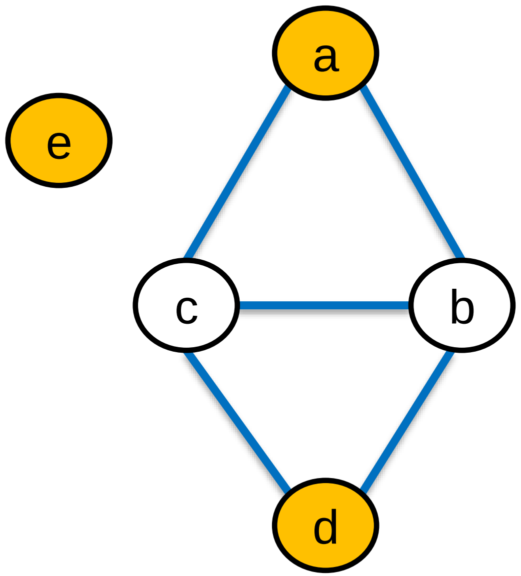
R1:
R2:
R3:

Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Considere o seguinte programa (com variáveis a, b, c, d, e) e 3 registradores (R1, R2, R3)
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos temporais?
- Nodos: variáveis
- Arestas: restrição temporal entre variáveis
- Cores: registradores



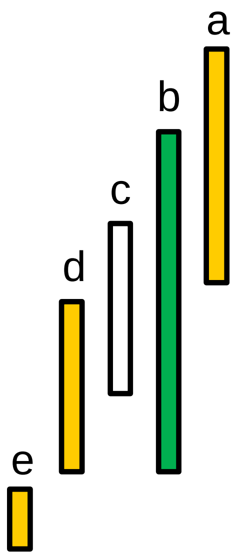
a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7



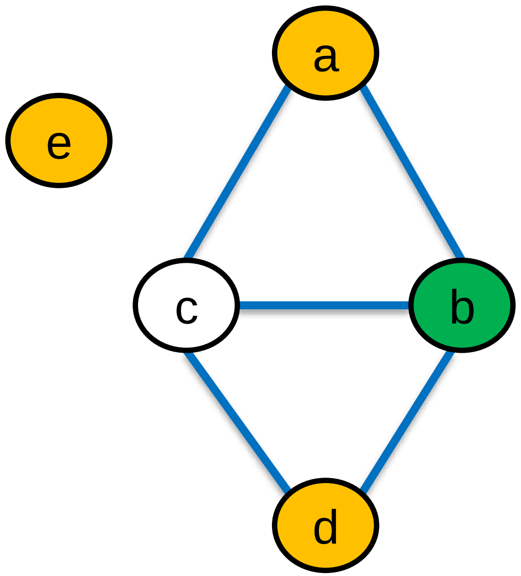
R1: a, d, e
R2:
R3:

Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Considere o seguinte programa (com variáveis a, b, c, d, e) e 3 registradores (R1, R2, R3)
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos temporais?
- Nodos: variáveis
- Arestas: restrição temporal entre variáveis
- Cores: registradores



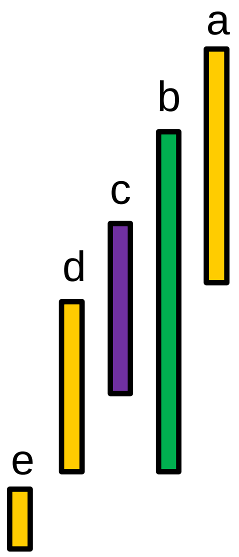
a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7



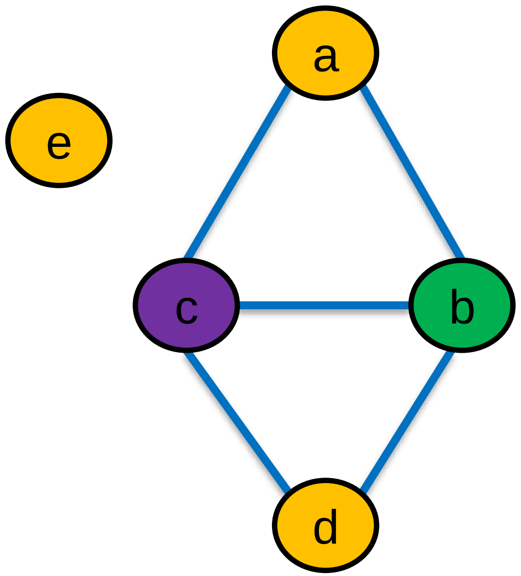
R1: a, d, e
R2: b
R3:

Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Considere o seguinte programa (com variáveis a, b, c, d, e) e 3 registradores (R1, R2, R3)
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos temporais?
- Nodos: variáveis
- Arestas: restrição temporal entre variáveis
- Cores: registradores



a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7



R1: a, d, e
R2: b
R3: c

Outras Aplicações

- Frequências de Torres de Rádio
  - Problema: Alocar frequências para torres de rádio.
  - Restrição: Evitar interferência de sinal entre torres próximas.

Coloração de Grafos

- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \rightarrow C$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

Coloração de Grafos

- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \rightarrow C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

Coloração de Grafos

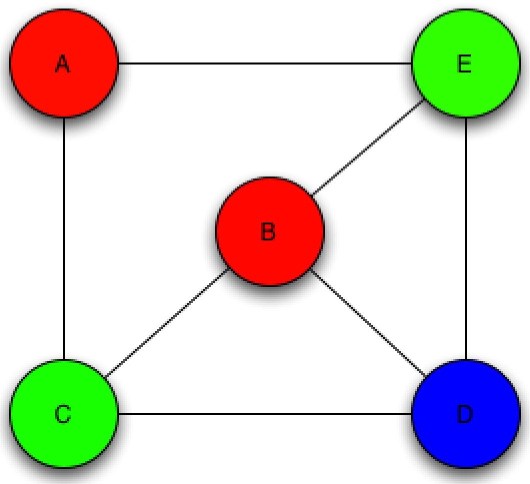
- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

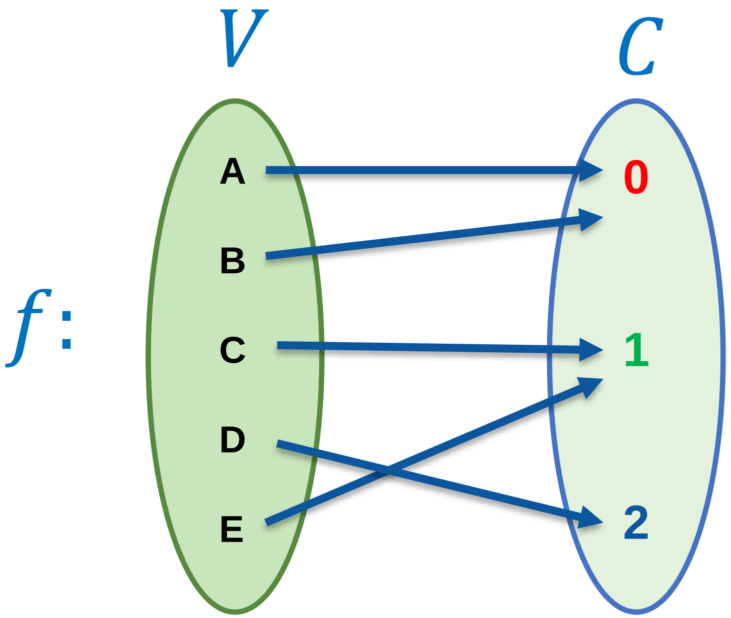
Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Exemplo:





$|img(f)|$ é o **número de cores** da coloração f.

Coloração de Grafos

- **Definição.** Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- **Definição.** Um grafo G é **k-colorível** se, e somente se,

Coloração de Grafos

- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Definição. Um grafo G é **k-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

Coloração de Grafos

- **Definição.** Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

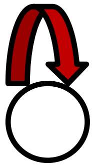
Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- **Definição.** Um grafo G é **k-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

- Importante:
  - Pseudografos não são coloríveis, pois possuem laços.



Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\boldsymbol{\chi(G)}$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

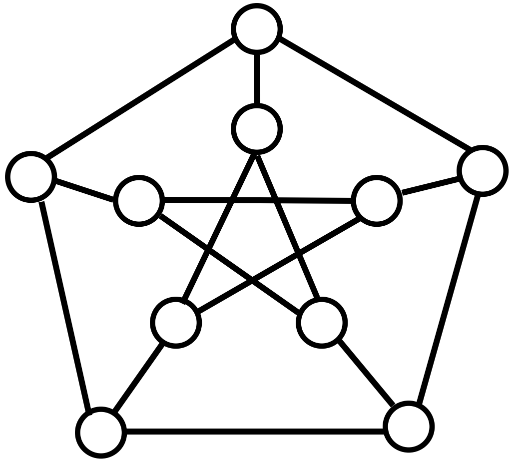
$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(\boldsymbol{G})$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



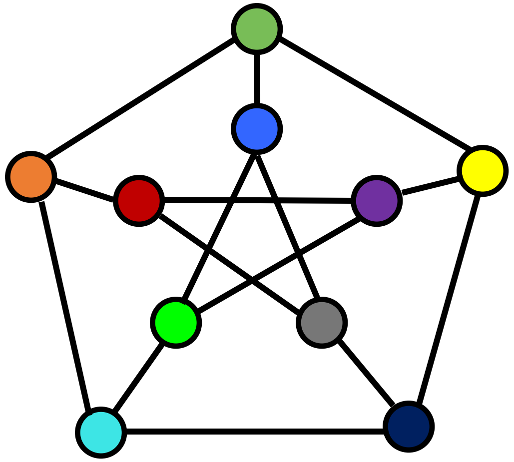
G
(Grafo de Petersen)

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(\boldsymbol{G})$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

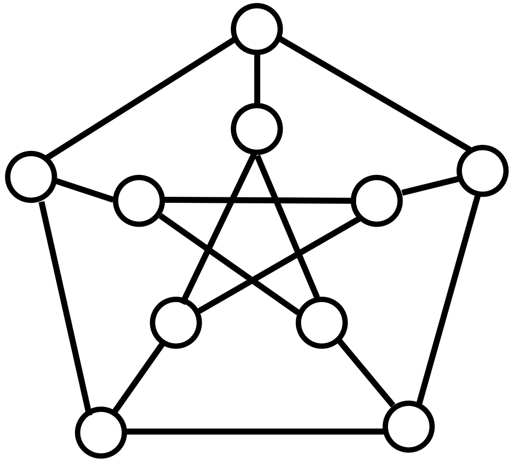
- 10-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(\boldsymbol{G})$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

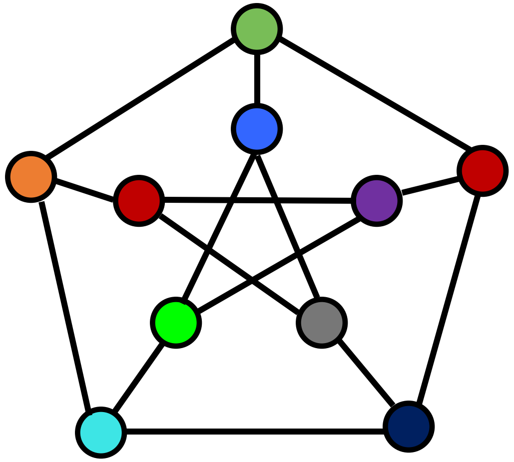
- 10-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático $\chi(\boldsymbol{G})$** de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

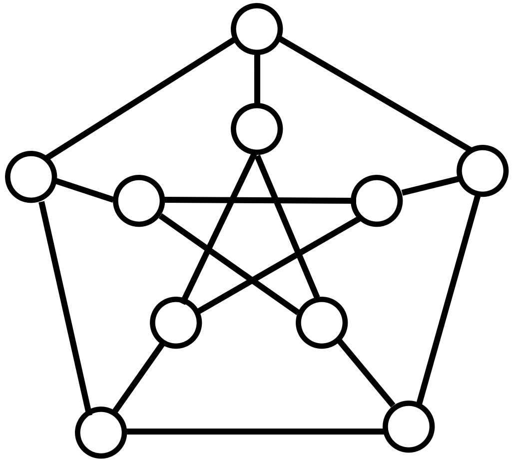
- 10-colorível
- 9-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(\boldsymbol{G})$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

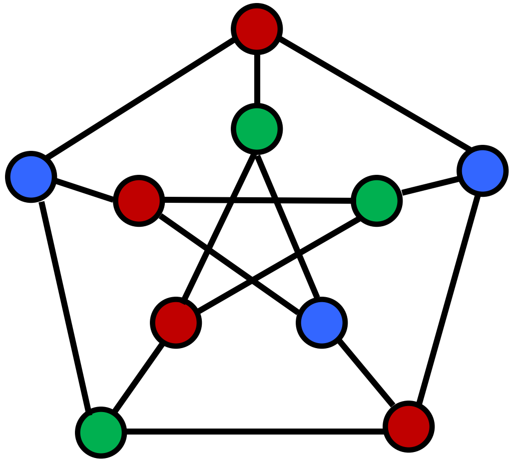
- 10-colorível
- 9-colorível
- …

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\boldsymbol{\chi(G)}$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

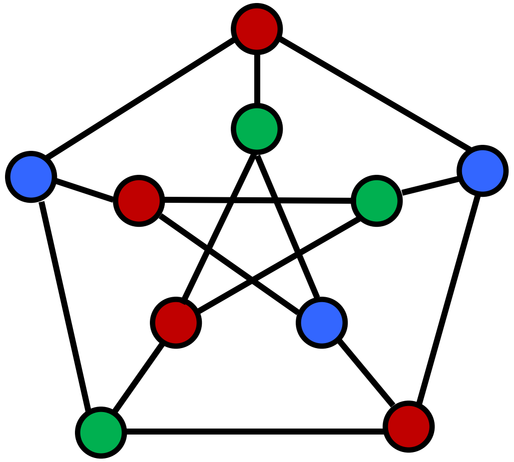
- 10-colorível
- 9-colorível
- …
- <u>3-colorível</u>
- não é 2-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\boldsymbol{\chi(G)}$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

- 10-colorível
- 9-colorível
- …
- 3-colorível
- não é 2-colorível

3-cromático

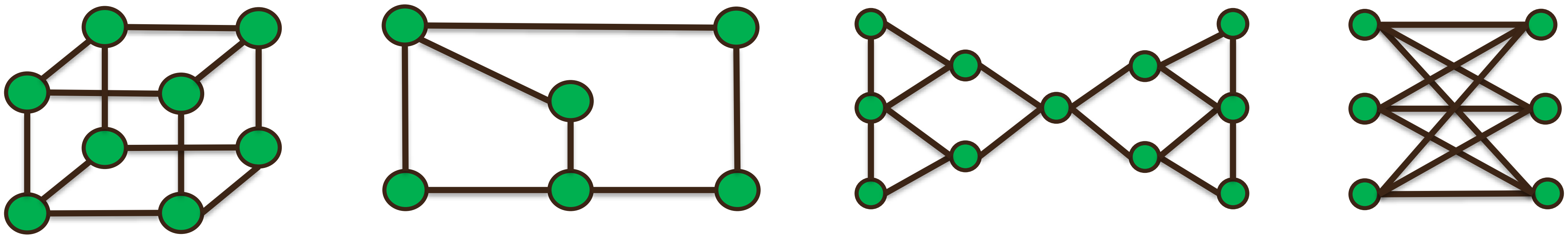
$\chi(G) = \mathbf{3}$

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(\boldsymbol{G})$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \chi(G) = \boldsymbol{k}$$

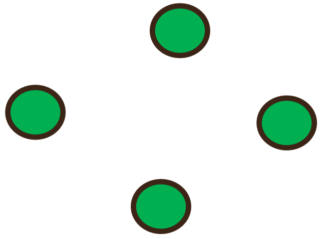
- Exercício: Defina o número cromático dos grafos abaixo:



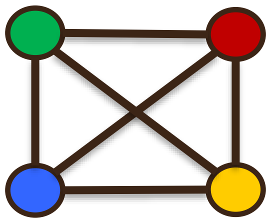
Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o **número cromático** de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se $|V| = 0$, então $\chi(G) = 0$.
- Se $|E| = 0$ e $|V| > 0$, então $\chi(G) = 1$.



- $\chi(G) \leq |V|$.



Limites para o Número Cromático

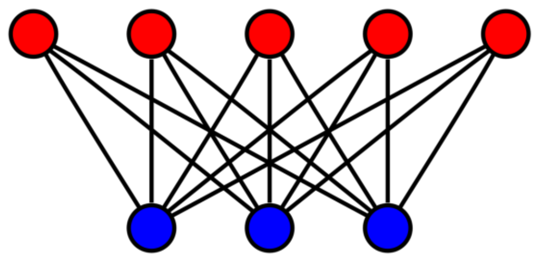
Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se G é bipartido, então

Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

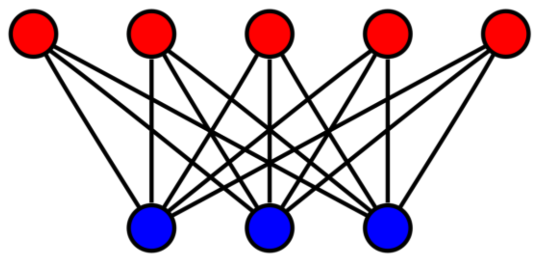
- Se G é bipartido, então $\chi(G) \leq 2$



Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se G é k-partido, então $\chi(G) \leq k$

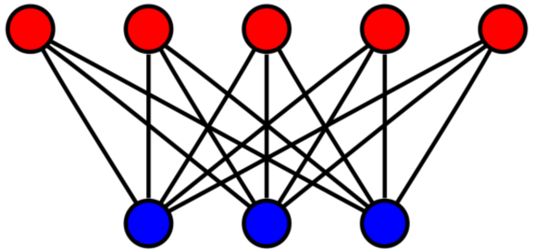


- Seja $\omega(G)$ o tamanho do maior clique de G,

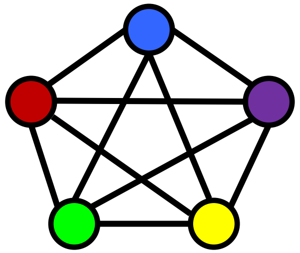
Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se G é k-partido, então $\chi(G) \leq k$



- Seja $\omega(G)$ o tamanho do maior clique de G, então $\chi(G) \geq \omega(G)$
  - Em um clique cada nodo deve obrigatoriamente ter uma cor diferente.



$\chi(K_5) = 5$

Limites para o Número Cromático

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, onde $\Delta(G)$ é o maior grau de algum vértice em V. Então:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ideia: Se algum vértice u possui n vizinhos, então podemos colorir cada vizinho com uma cor diferente,

Limites para o Número Cromático

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, onde $\Delta(G)$ é o maior grau de algum vértice em V. Então:

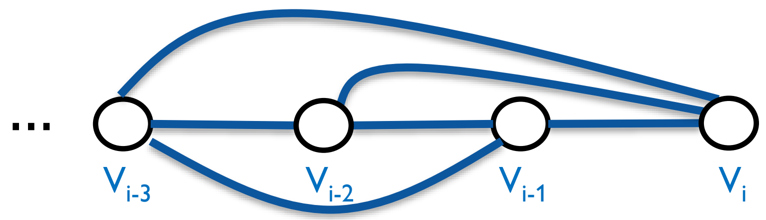
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ideia: Se algum vértice u possui n vizinhos, então podemos colorir cada vizinho com uma cor diferente, e u com uma cor adicional ($n + 1$).

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.

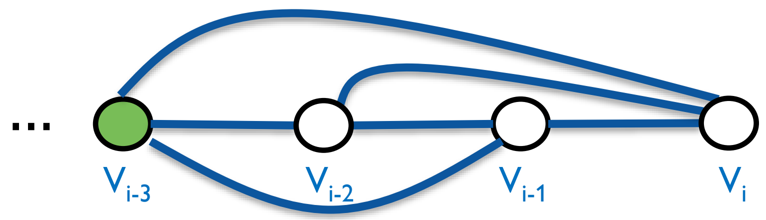


$\Delta(G) = 3$

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Colorindo v_i: Atribua a primeira cor não usada em nenhum vizinho já colorido.

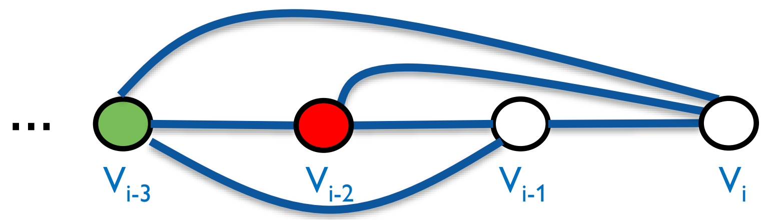


$\Delta(G) = 3$

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \dots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Colorindo v_i: Atribua a primeira cor não usada em nenhum vizinho já colorido.

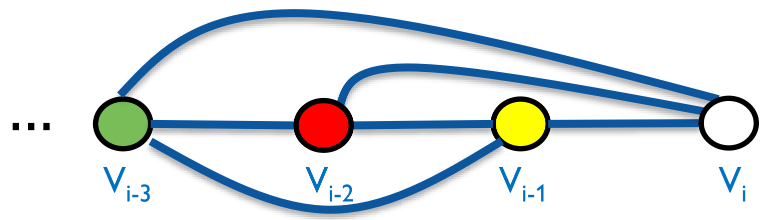


$\Delta(G) = 3$

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Colorindo v_i: Atribua a primeira cor não usada em nenhum vizinho já colorido.



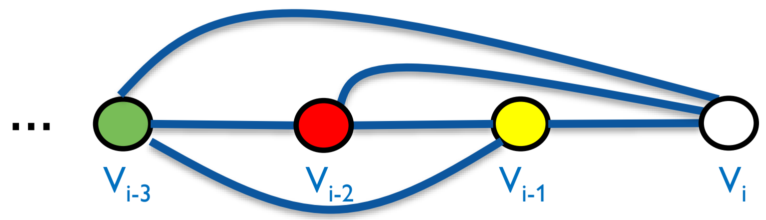
$\Delta(G) = 3$

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Colorindo v_i: Atribua a primeira cor não usada em nenhum vizinho já colorido.

- Pior caso: Há $\Delta(G)$ vizinhos adjacentes de v_i com cores diferentes.



$$\Delta(G) = 3$$
$$k = \Delta(G) + 1 = 4$$

Limites para o Número Cromático

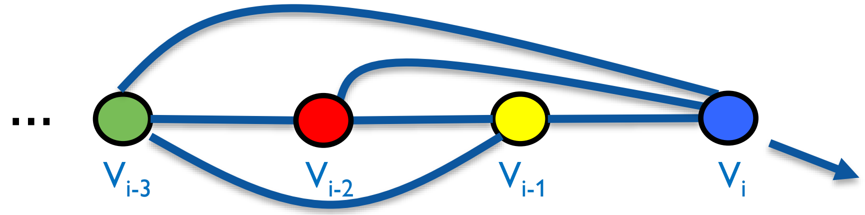
Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Colorindo v_i: Atribua a primeira cor não usada em nenhum vizinho já colorido.

- Pior caso: Há $\Delta(G)$ vizinhos adjacentes de v_i com cores diferentes.

Portanto precisamos de uma cor adicional $\Delta(G) + 1$.

$$\Delta(G) = 3$$
$$k = \Delta(G) + 1 = 4$$



Cor $\Delta(G) + 1$

Coloração e Grafos Planares

- Restringindo nossa atenção a grafos planares, obtemos resultados mais precisos.

- Conjectura das 4 Cores
  - É sempre possível colorir um mapa usando apenas 4 cores.

  - Postulado em 1852 por Francis Guthrie,

    ao colorir o mapa dos condados da Inglaterra.

- Teorema das 5 Cores

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Lema. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e planar. Então existe pelo menos um vértice v com no máximo 5 vizinhos.

Prova por contradição. Assuma que todo vértice v tem pelo menos 6 vizinhos.

- Pela fórmula de Euler (*aula passada*), temos:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

- Porém, se todo vértice tem pelo menos 6 vizinhos, então:

$$|E| \geq \frac{6}{2}|V| = 3|V|$$

Contradição.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

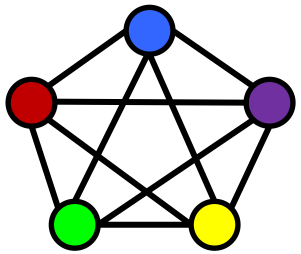
Prova por indução.

Proposição: $P(n)$. Se G é simples, planar e possui n vértices, então $\chi(G) \leq 5$

Caso base:

$P(n \leq 5)$. G possui $n \leq 5$ vértices.

Trivial: Cada vértice pode receber uma cor diferente.



$\chi(G) \leq 5$

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Hipótese de Indução:

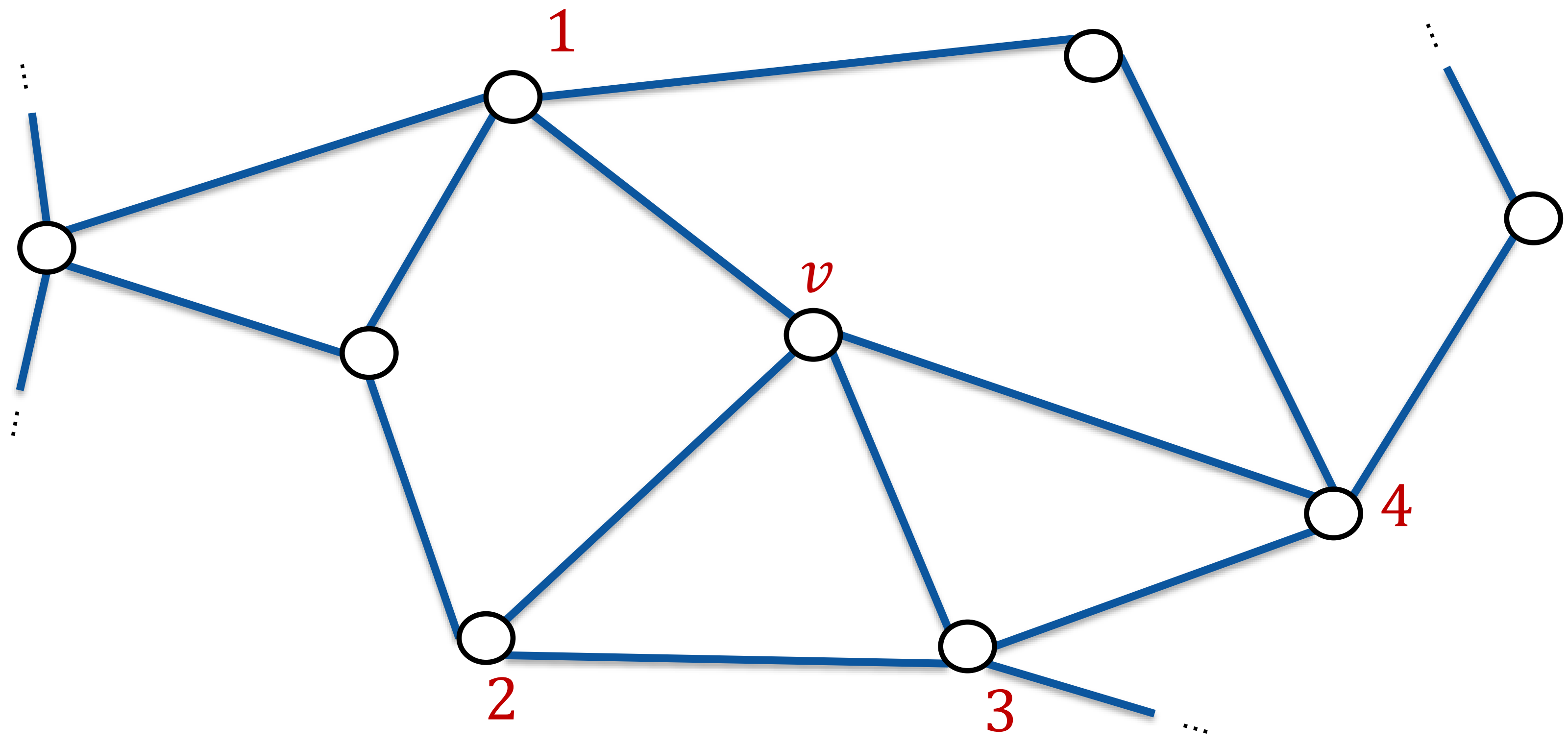
$P(k < n)$. Se G é simples, planar e possui $k < n$ vértices, então $\chi(G) \leq 5$.

Vamos demonstrar que $P(k < n) \rightarrow P(n)$.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução. Considere G com n vértices, e v um vértice com grau máximo 5.

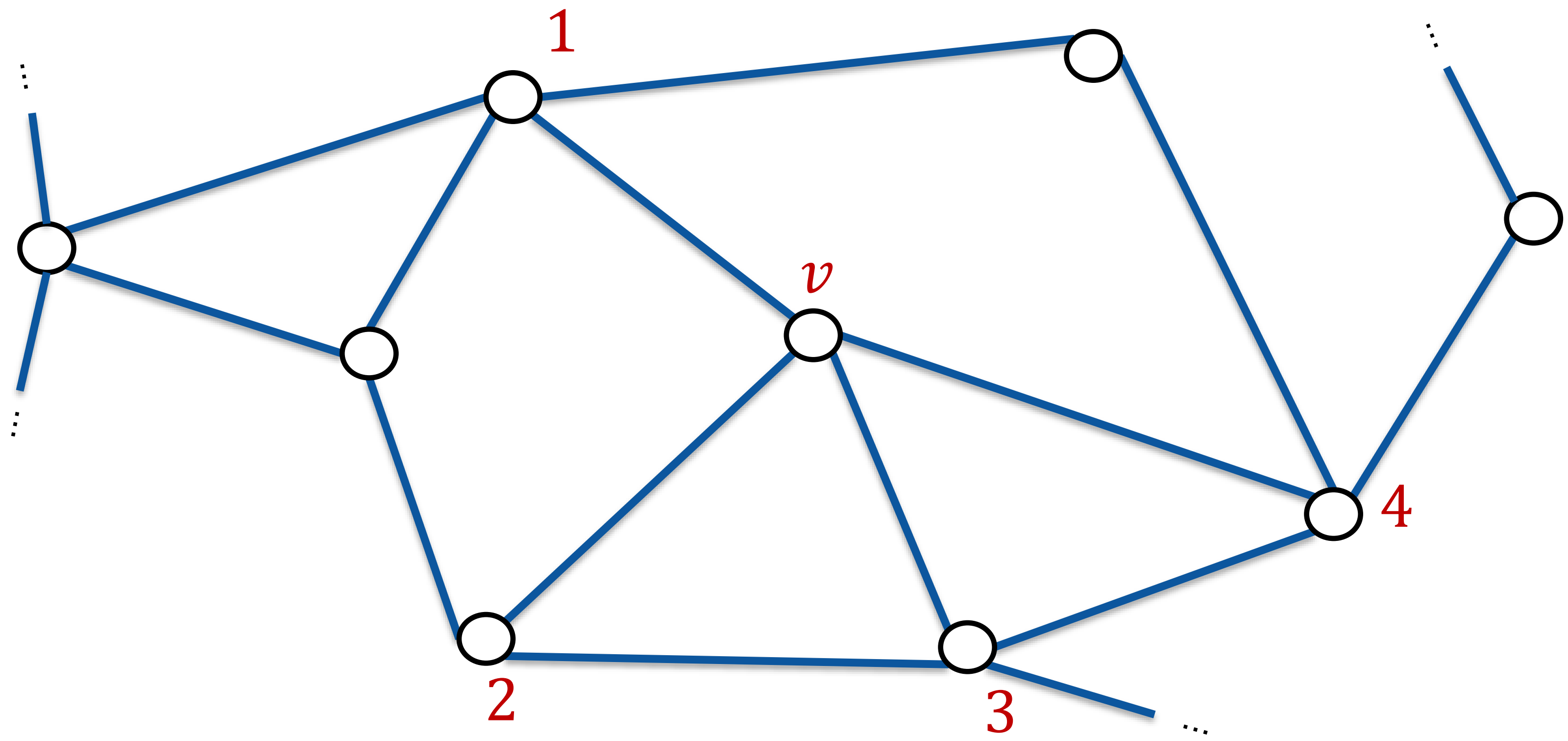


Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução. Considere G com n vértices, e v um vértice com grau máximo 5.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.



Teorema das 5 Cores

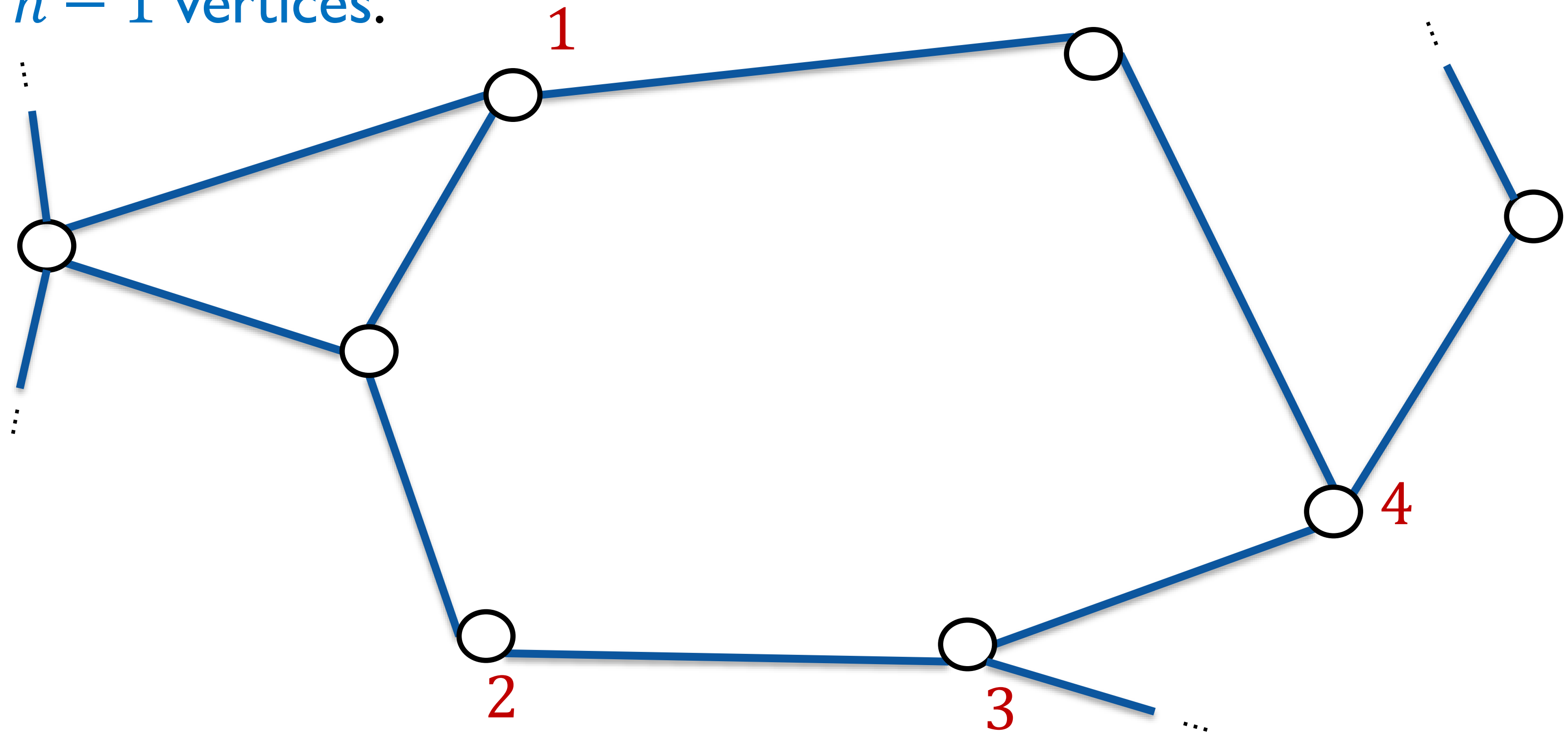
Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.

Ao remover v, G tem $n-1$ vertices.

$P(n-1)$.



Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

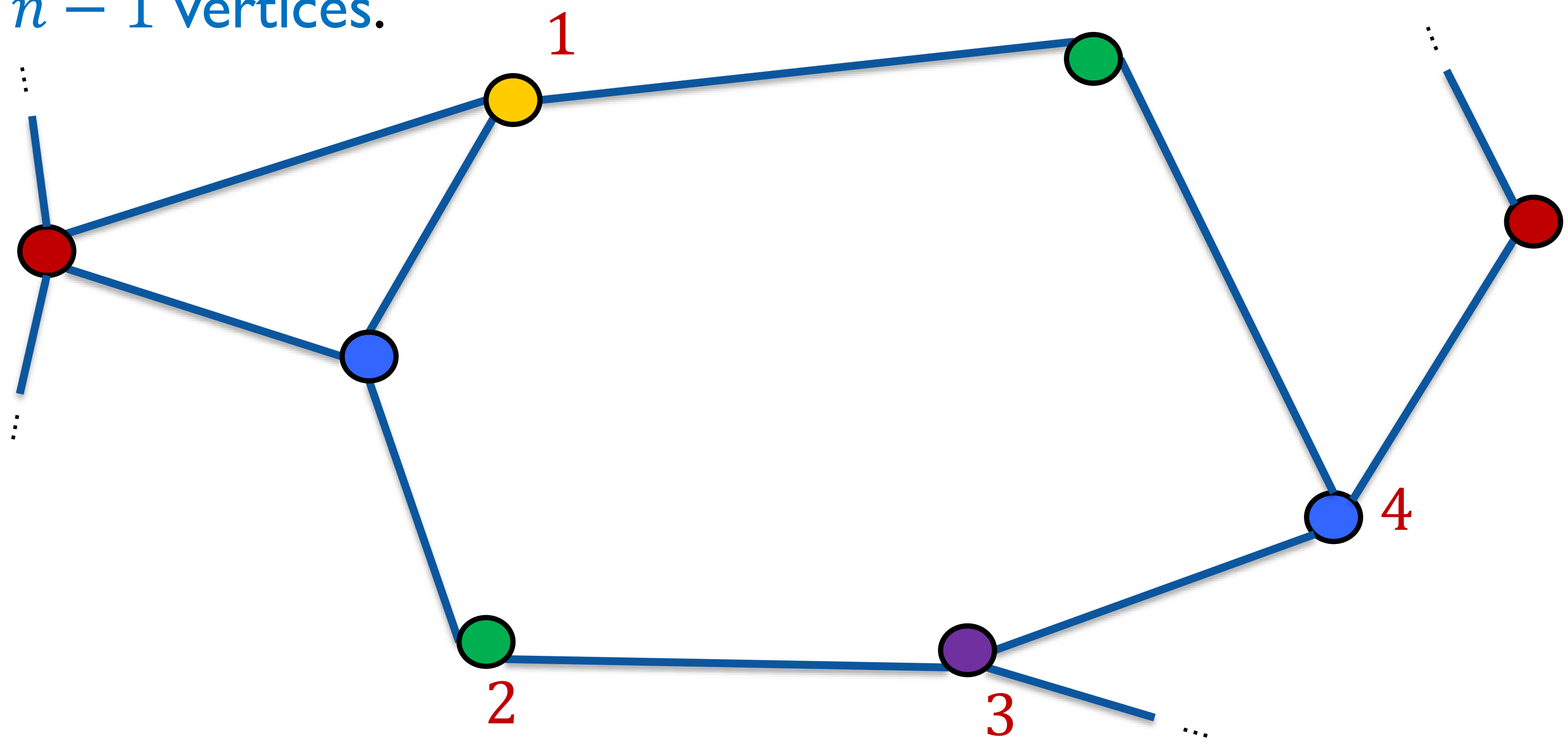
Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.

Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

$P(n-1)$.

O grafo é

5-colorível.



Teorema das 5 Cores

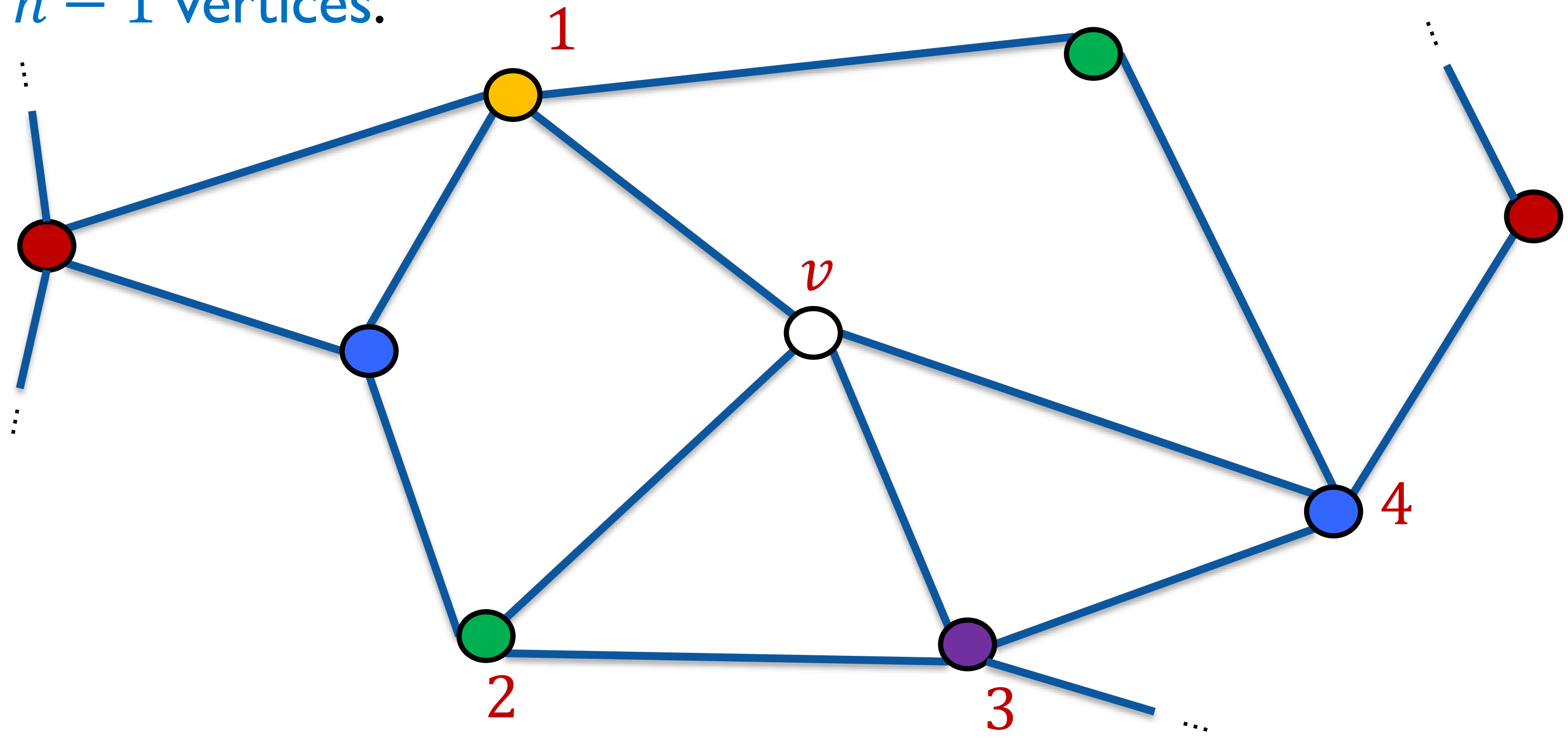
Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.

Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

$P(n-1)$



Ao reintroduzir v,

há uma cor restante.

Teorema das 5 Cores

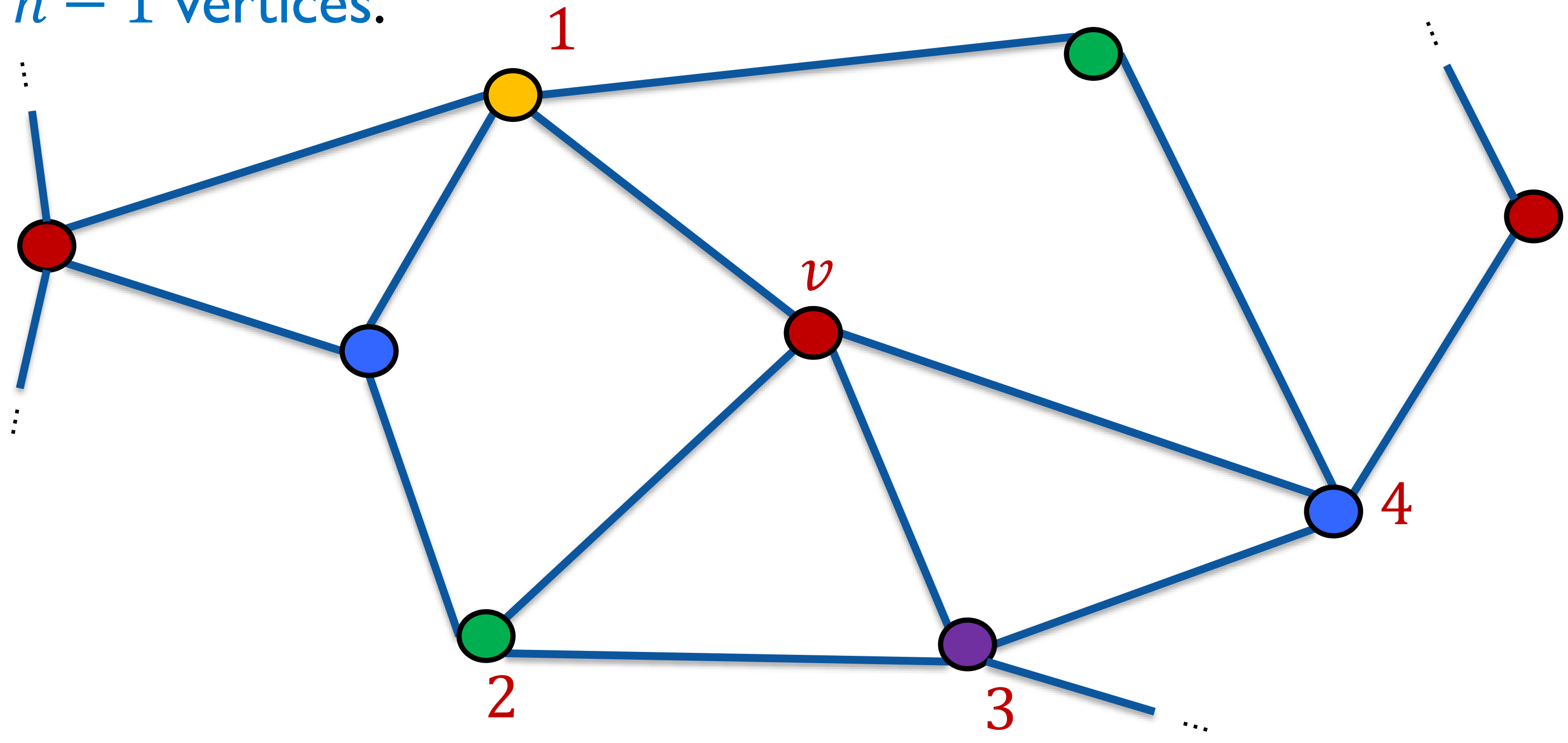
Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.

Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

$P(n-1) \rightarrow \boldsymbol{P(n)}$.



Colorimos v

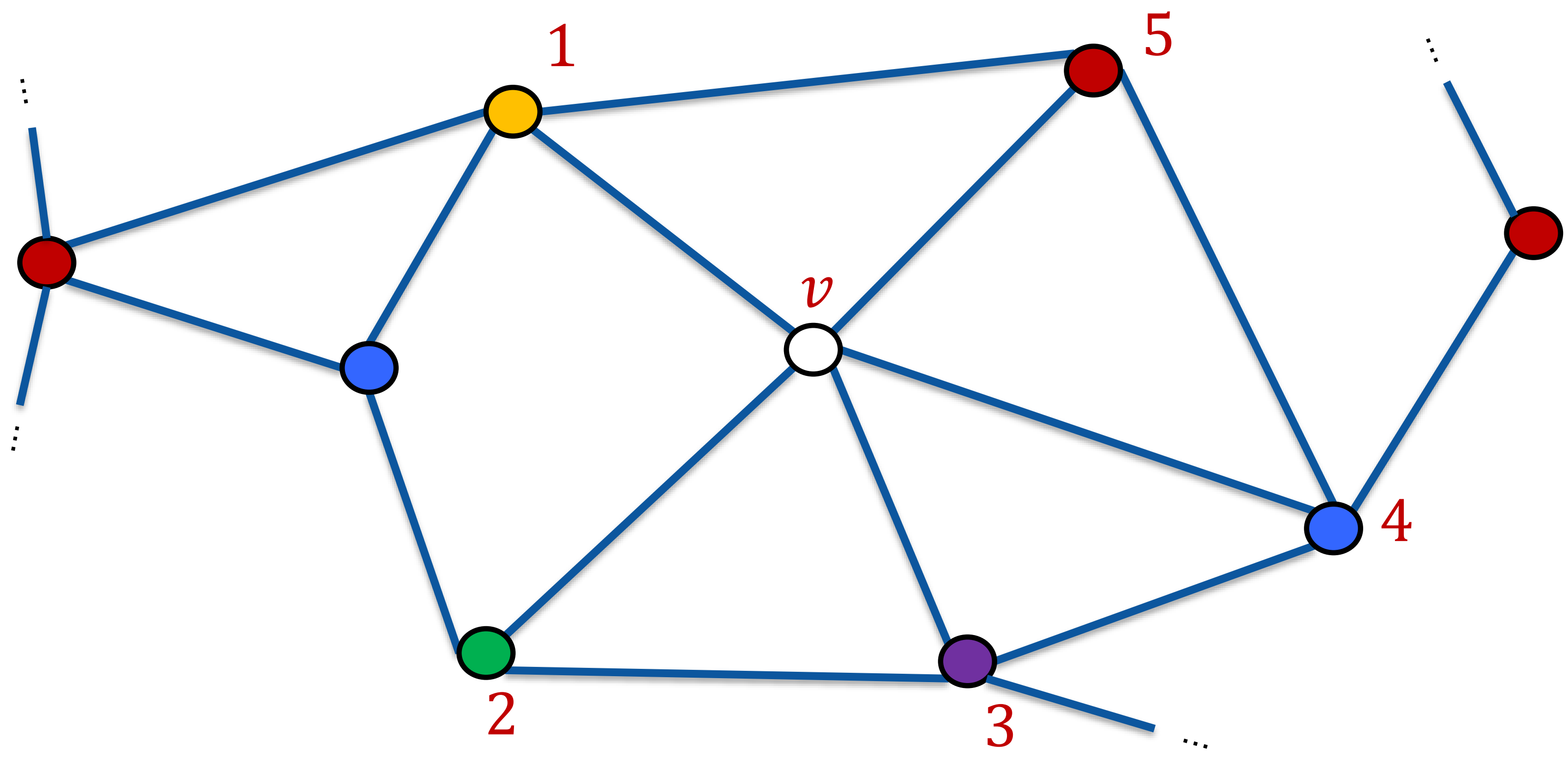
com a cor restante!

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



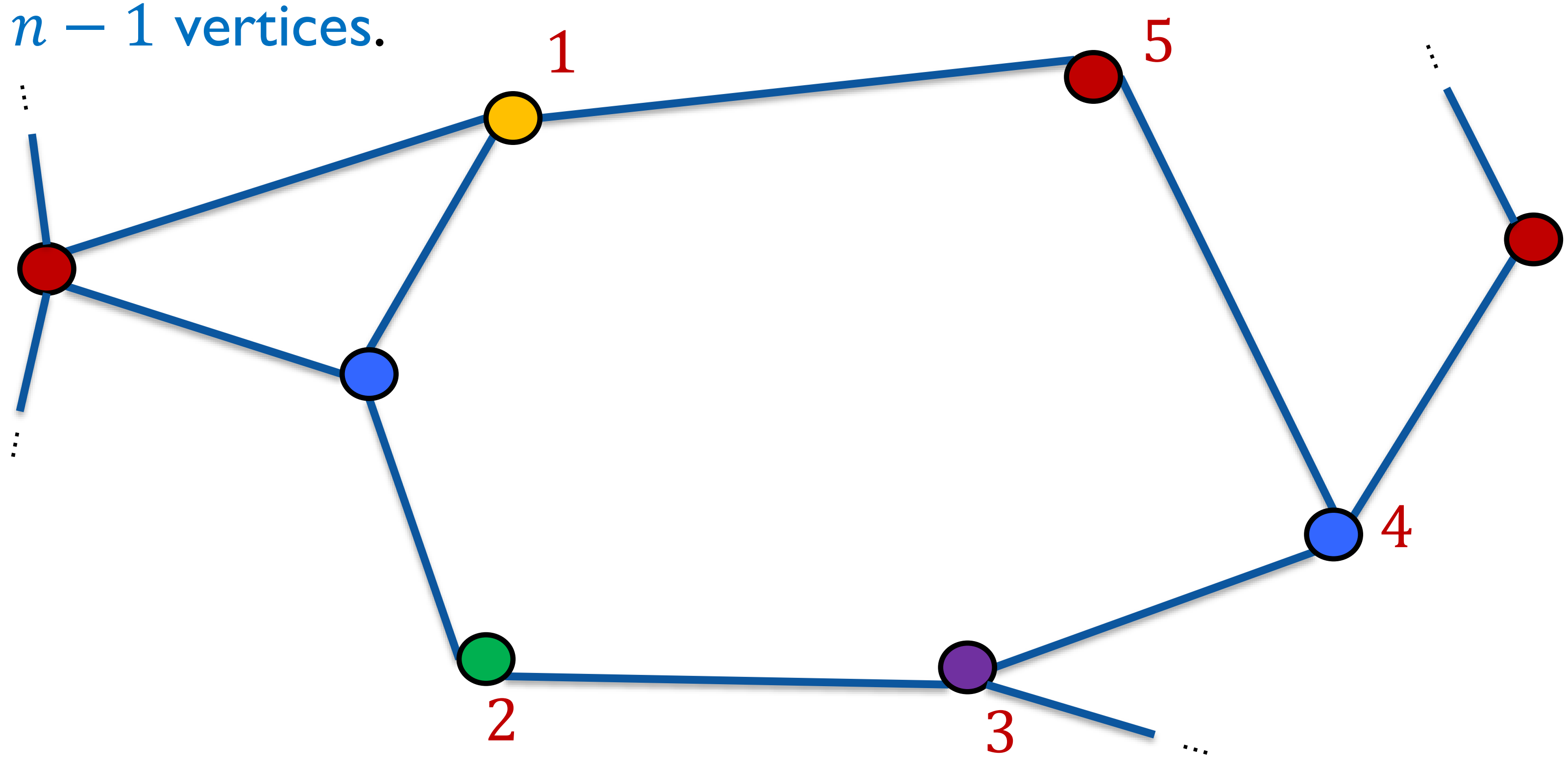
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.

Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

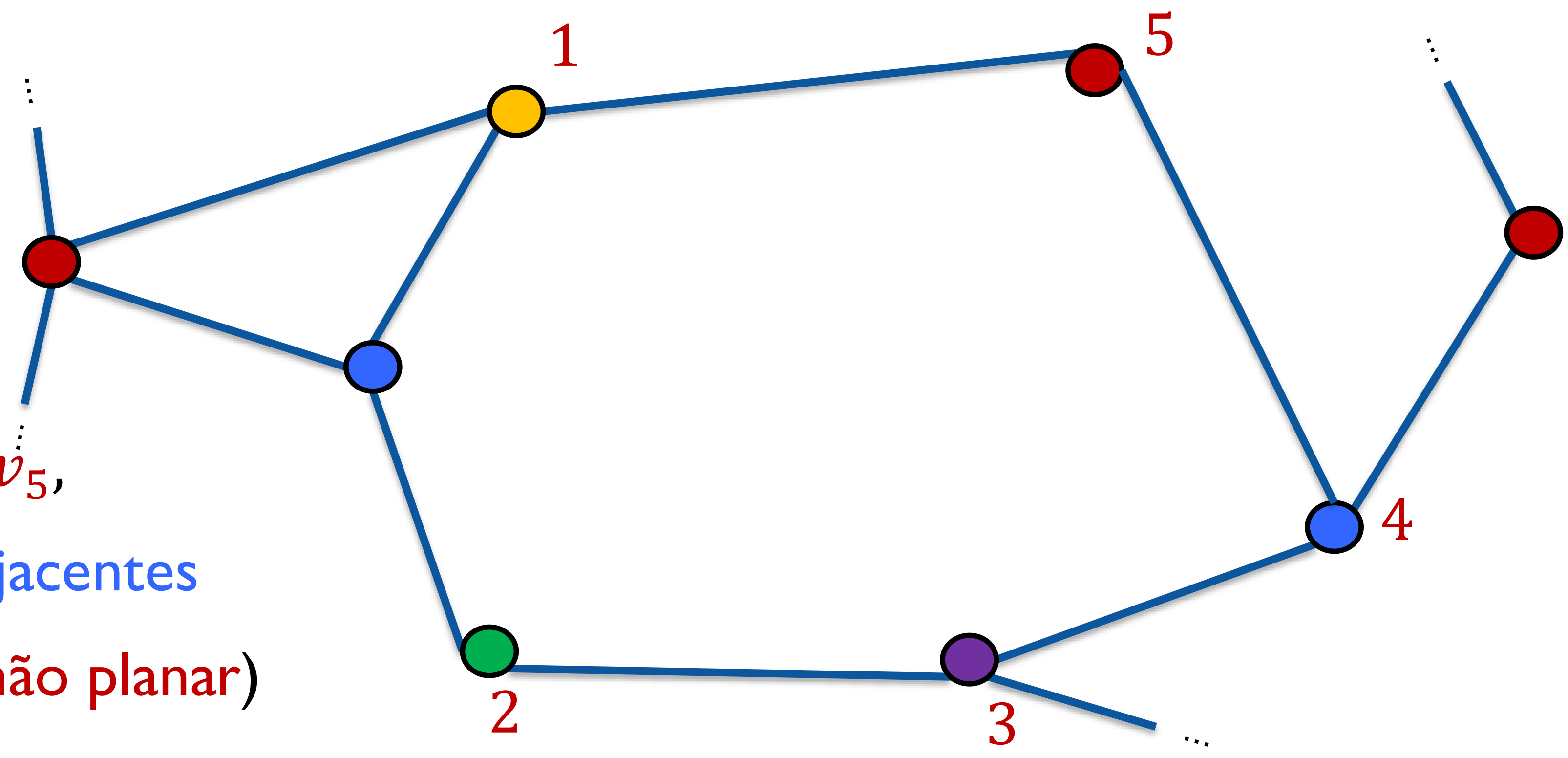


Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Entre os vizinhos $v_1 \ldots v_5$,

deve haver dois não-adjacentes

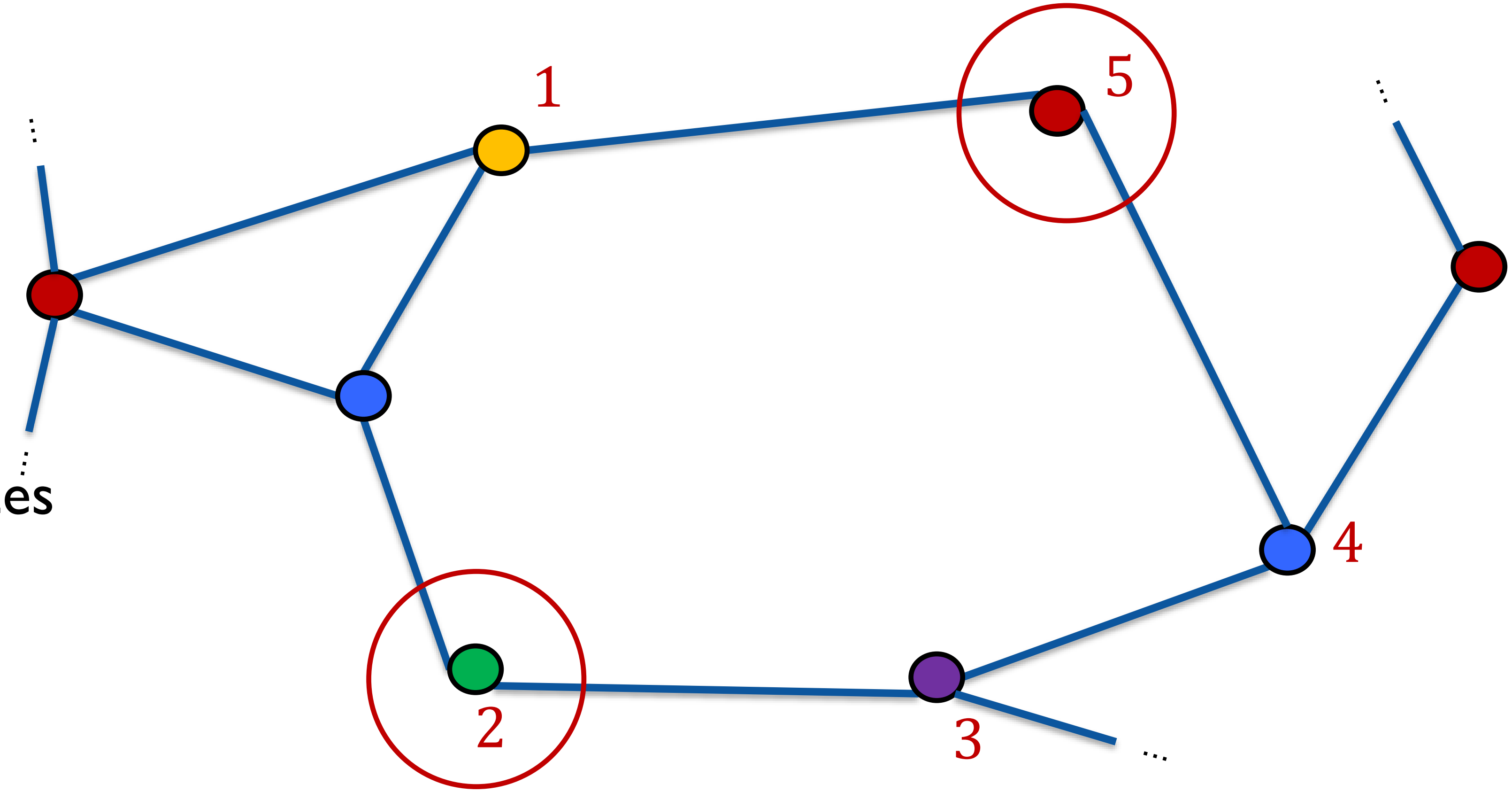
(senão, teríamos K_5 – não planar)

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



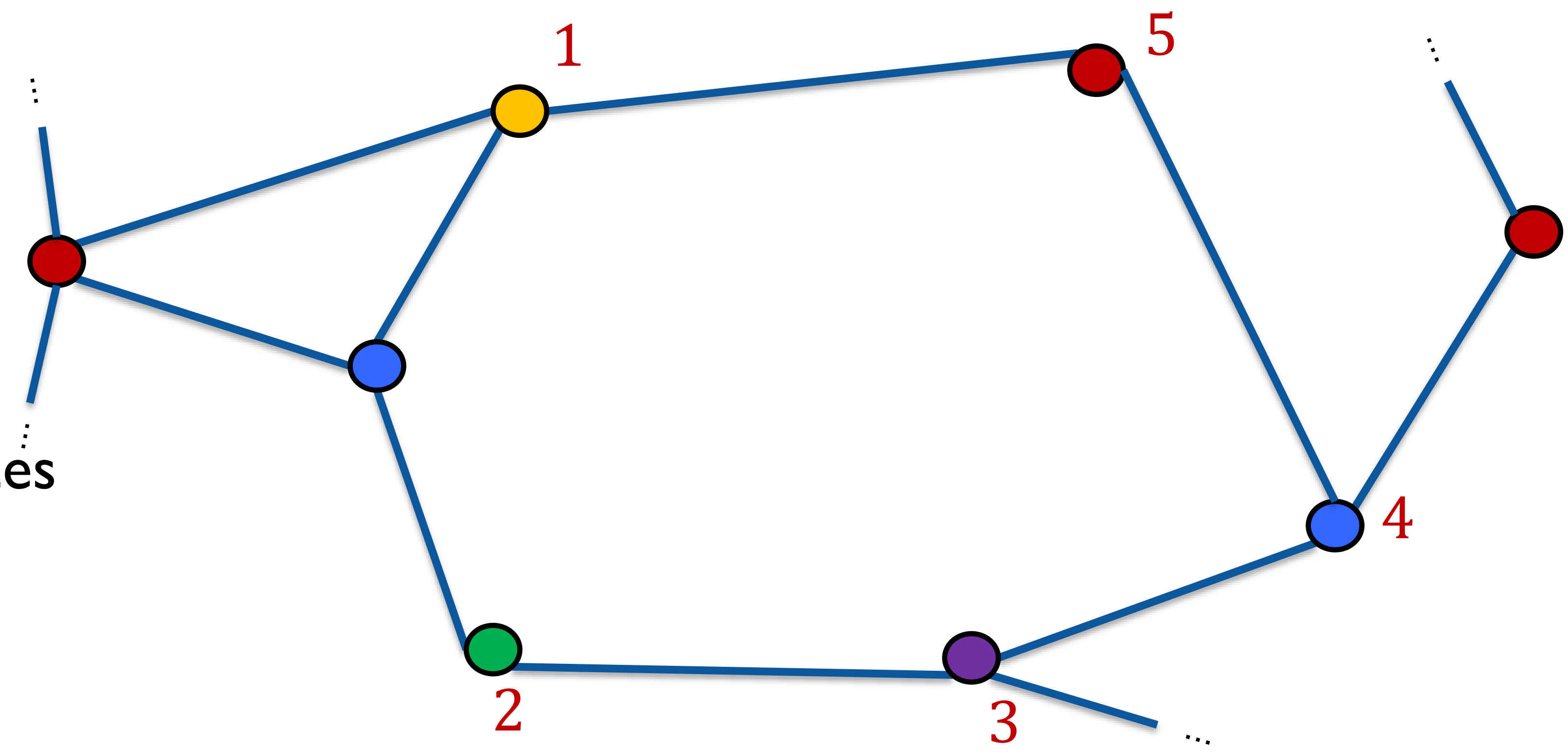
Seja v_2 e v_5 dois vértices não-adjacentes.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Seja v_2 e v_5 dois vértices

não-adjacentes.

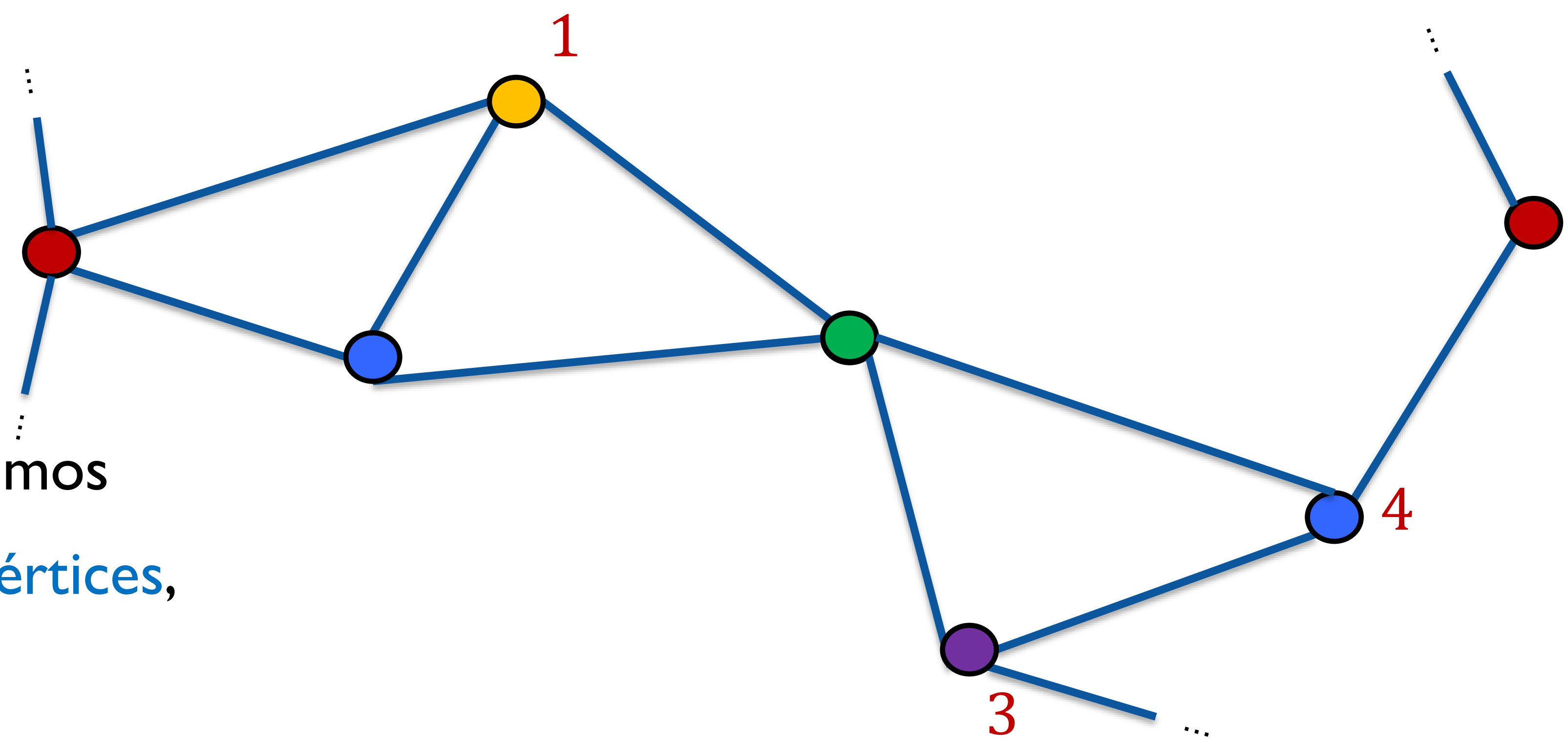
Vamos contraí-los.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Ao contrair v_2 e v_5 temos

um grafo com $n - 2$ vértices,

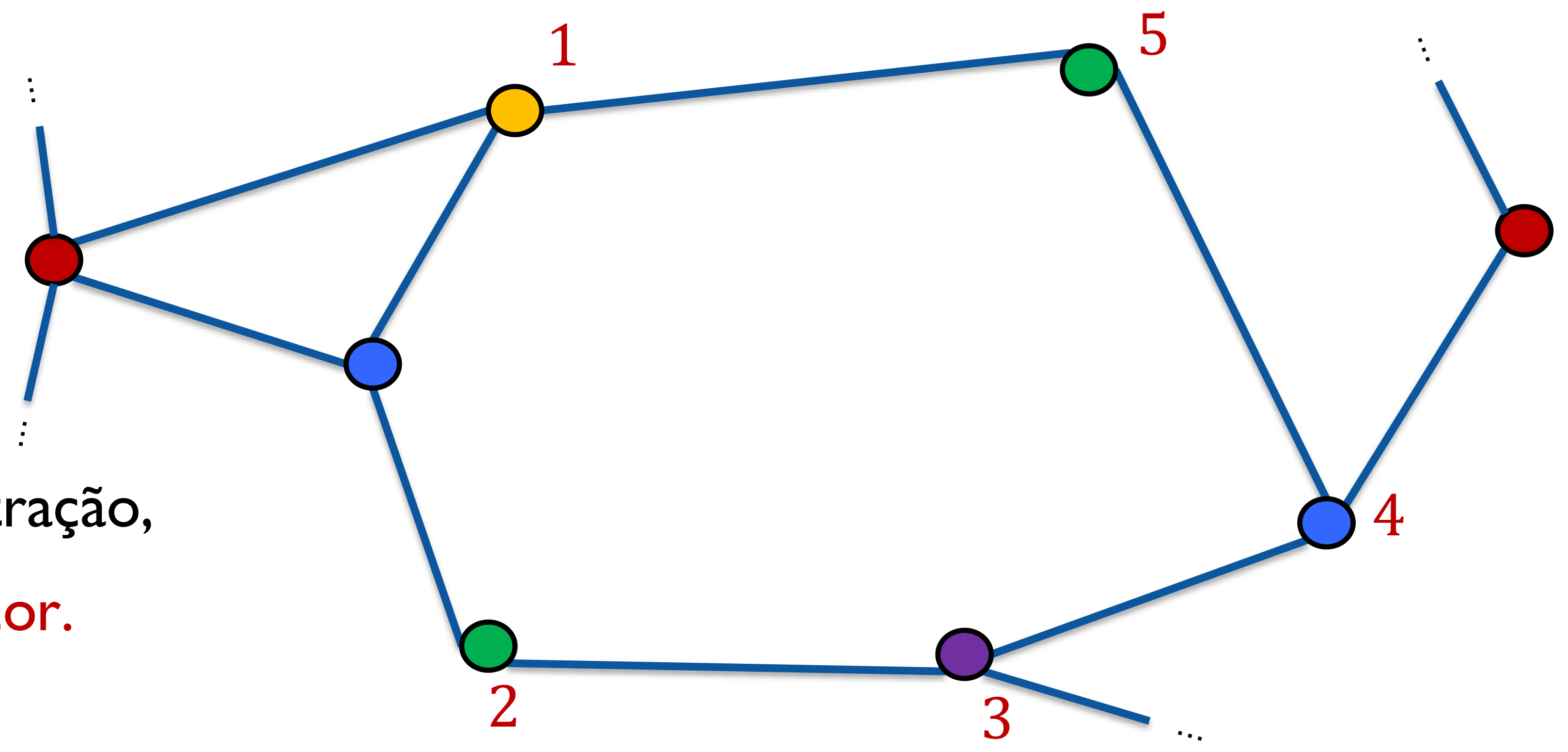
5-colorível pela H.I.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Ao desfazermos a contração,

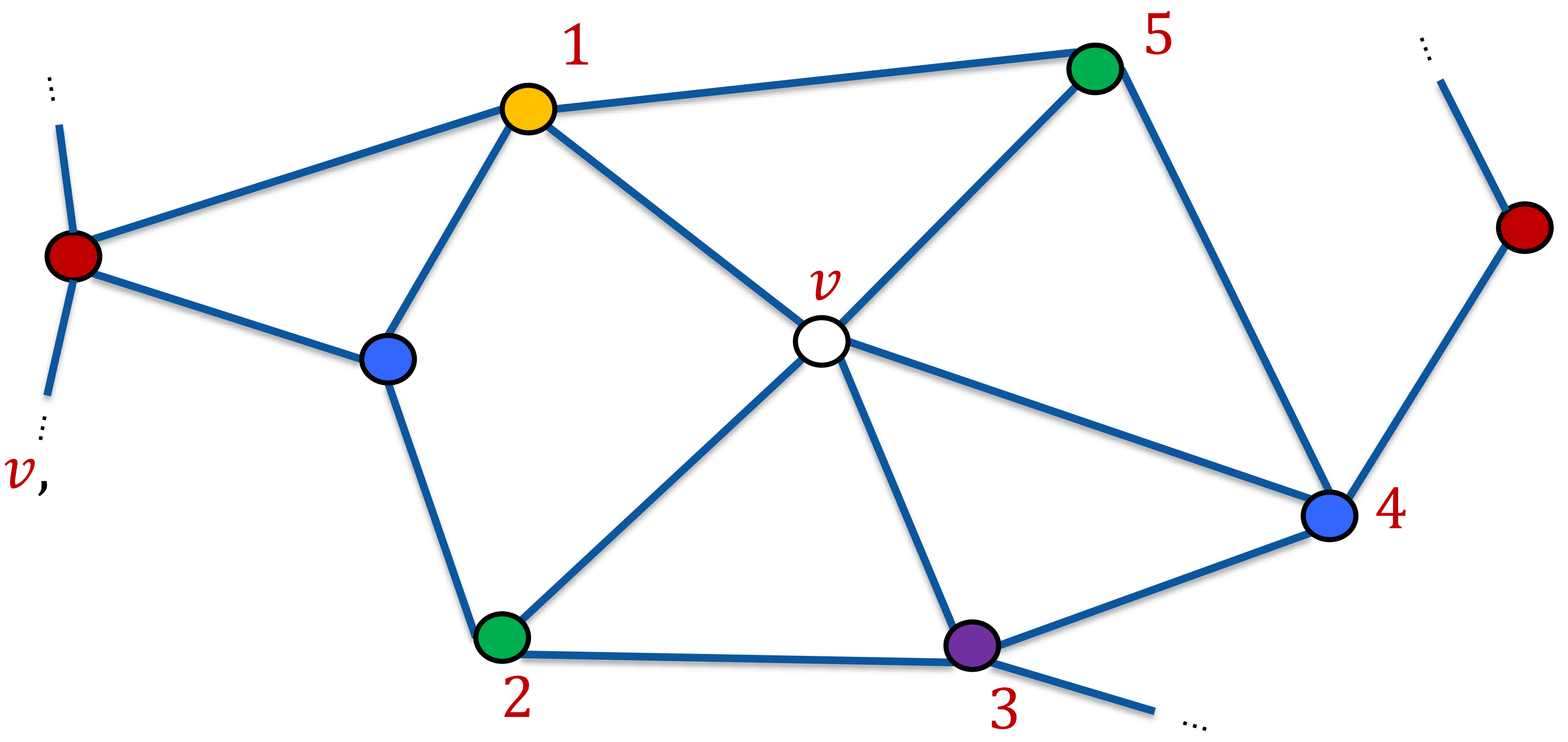
v_2 e v_5 tem a mesma cor.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Ao reintroduzirmos v,

temos agora

uma cor disponível!

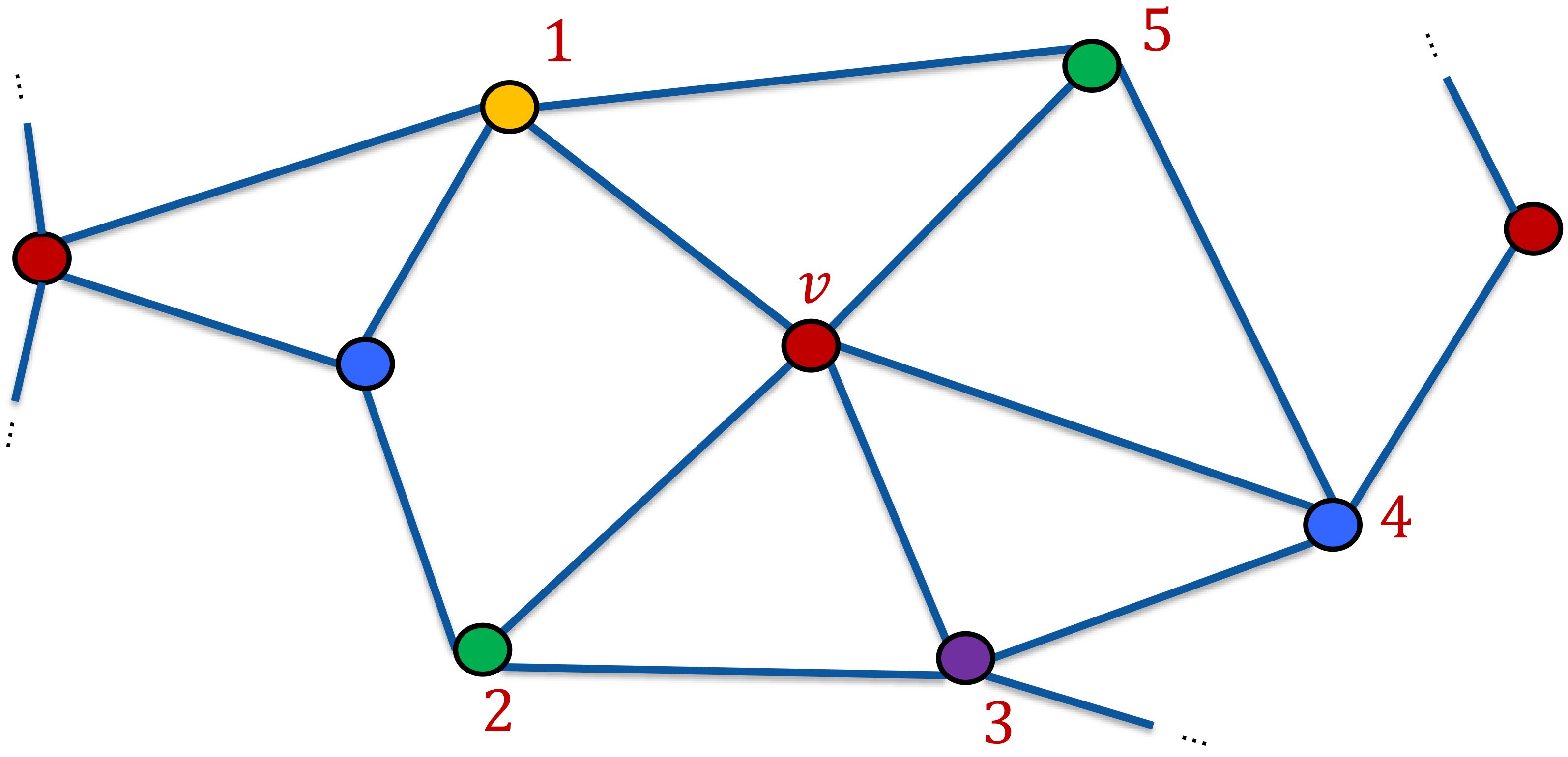
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.

$P(k < n) \rightarrow \boldsymbol{P(n)}$.



Fim da prova!

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq \mathbf{4}$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq \mathbf{4}$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

- 1852: F. Guthrie propôs a conjectura para seu professor, De Morgan.

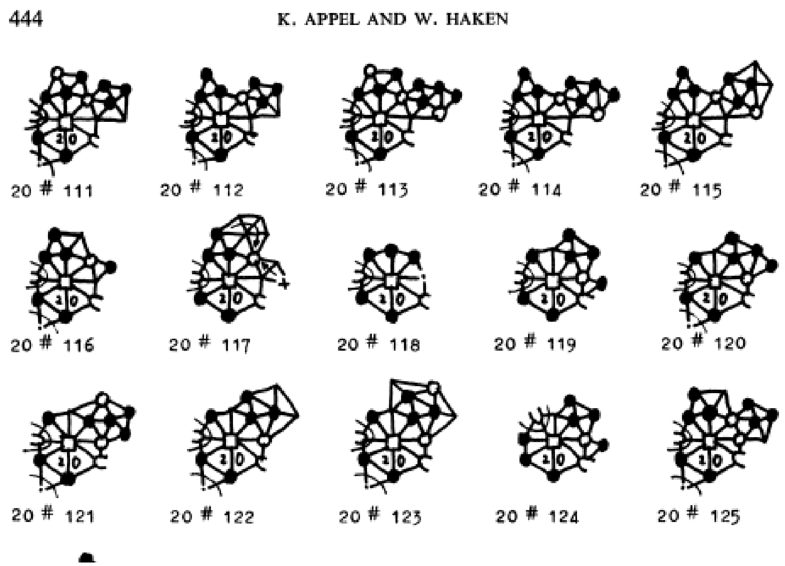
- 1879: Alfred B. Kempe anunciou que tinha uma demonstração da conjectura. Ele ganhou muito prestígio e foi nomeado membro da Royal Society.

- 1890: Percy Heawood encontrou um erro na prova de Kempe, e provou o Teorema das Cinco Cores.

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq \mathbf{4}$.

- Somente em **1977**, Appel & Haken provaram o teorema com ajuda de computadores.
- Primeira vez que um teorema importante é provado dessa forma!

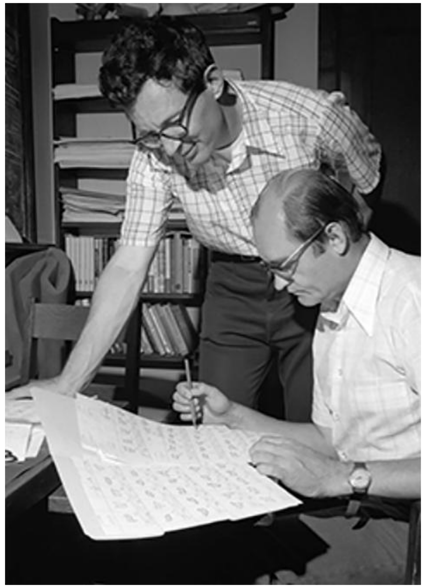


- Ideia: Criar reduções e testar 1936 configurações. possíveis, usando ~1200 horas de computação!
- À mão, levariam 100 mil anos, dedicando-se 60h/semana.
- Simplificações foram feitas na prova deste então.
- Até hoje, não existe prova para o Teorema sem auxílio de computadores.

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq \mathbf{4}$.

- Somente em **1977**, Appel & Haken provaram o teorema com ajuda de computadores
- Primeira vez que um teorema importante é provado dessa forma!



- Muitos questionaram a legitimidade da prova.
  - O que conta como uma prova válida?
- Computadores se tornaram ubíquos em provas matemáticas.
- Propulsor do estudo de Teoria dos Grafos ao longo do tempo.

Algoritmos de Coloração

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?

Algoritmos de Coloração

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

Disciplina de Teoria da Computação II
Classes de complexidade computacional

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

Algoritmos de Coloração

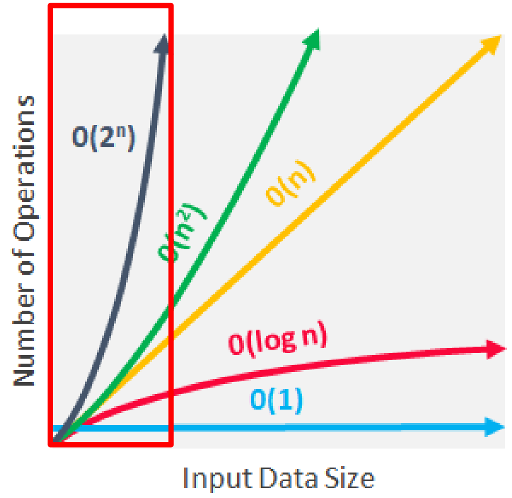
- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

Disciplina de Teoria da Computação II
Classes de complexidade computacional

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

Intuitivamente:

- O número de operações para resolver o problema ... cresce **exponencialmente** com o tamanho do grafo.



Algoritmo Guloso (não ótimo)

Entrada: Grafo simples $G = (V, E)$, cores $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$

Saída: Coloração $f : V \rightarrow C$

1. Ordene os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em ordem arbitrária
2. Para cada vértice v_i :
3. Para cada cor c_i :
4. Se algum vizinho de v_i possui cor c_i, vá para a próxima cor
5. Senão, atribua cor c_i para o vértice v_i : $f(v_i) = c_i$

Algoritmo Guloso (não ótimo)

Visualização:

https://yllberisha.github.io/GraphColoring

Lista de Exercícios

(ver Plano de Aula)

Muito Além das Cores

- Problema clássico de Teoria dos Grafos, com grande relevância histórica e ramificações na Computação, Matemática, e em diversas aplicações do mundo real.
- 🧠 Coloração mínima (número cromático) é um problema intratável (NP-Difícil)
- 🗓️ Aplicações práticas em problemas reais:
  - Escalonamento de tarefas (ex.: horários de aulas, exames, processadores).
  - Alocação de recursos (ex.: frequências de rádio, registradores em compiladores).
  - Mapas e grafos geográficos (Teorema das 4 Cores).
- Próxima Aula: Algoritmos de Caminhos Mínimos – Dijkstra

Referências

- Introduction to Graph Theory (2nd ed), Capítulo 5.1. Douglas B. West. Pearson, 2017.
- Algorithm Design. Jon Kleinberg, Éva Tardos. Addison-Wesley Professional, 2005.
- Algoritmos: Teoria e Prática. Thomas H. Cormen et. al. Gen LTC, 2024.
- Introdução a Teoria dos Grafos. 2020. Edson Prestes.
- Mathematics for Computer Science. A. R. Meyer, E. Lehman, F. T. Leighton.
- Algorithms Illuminated. Tim Roughgarden.